

ششمین المپیاد هندسه ایران



مسائل رویداد به همراه راه حل ها

ششمین المپیاد هندسه ایران مسائل رویداد به همراه راه حل ها

این دفترچه توسط علیرضا دادگرنیا و بنیامین قاسمی نیا آماده شده است.
حق تکثیر © دبیرخانه المپیاد هندسه ایران ۱۳۹۸-۱۳۹۷. همه حقوق محفوظ است.

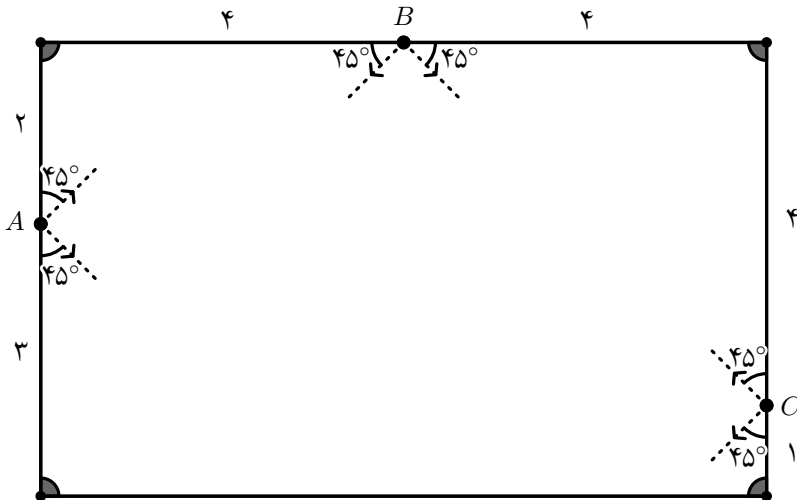
فهرست مطالب

۳	سطح مقدماتی
۳.....	مسائل
۵.....	راه حل ها
۱۵	سطح متوسط
۱۵.....	مسائل
۱۷.....	راه حل ها
۲۹	سطح پیشرفته
۲۹.....	مسائل
۳۱.....	راه حل ها

سطح مقدماتی

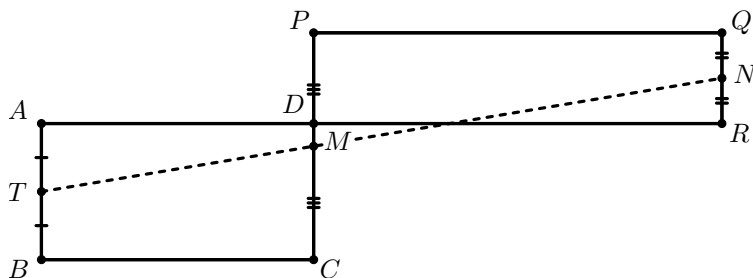
مسائل

(۱) میزی به شکل یک مستطیل ۵×۸ داریم. در چهار گوشه این میز سوراخ‌هایی قرار دارد. پس از شلیک توپی در جهت نشان داده شده از هر یک از نقاط A و B و C آیا توپ بعد از ۶ بار برخورد به دیواره‌های میز به درون یکی از سوراخ‌ها خواهد افتاد؟ (توپ پس از برخورد با دیواره‌های میز با همان زاویه باز می‌گردد).



(← ص. ۵)

(۲) مطابق شکل، $ABCD$ و $PQRD$ دو مستطیل با مساحت برابر هستند که اضلاع متناظر موازی دارند. نقاط M ، N و T به ترتیب اواسط پاره‌خط‌های PC ، QR و AB هستند. ثابت کنید نقاط M ، N و T روی یک خط قرار دارند.



(← ص. ۸۰)

(۳) در صفحه $n > 2$ خط در حالت عمومی رسم شده‌اند؛ یعنی هر دو خط با یکدیگر برخورد می‌کنند ولی هیچ سه خطی هم‌رس نیستند. تمامی نقاط برخورد خطوط با یکدیگر علامت گذاشته می‌شود. سپس همگی خطوط پاک می‌شوند ولی نقاط علامت‌گذاری‌شده باقی می‌مانند. نمی‌دانیم کدام نقطه متعلق به کدام خط است. آیا ممکن است بدانیم هر خط به کجا تعلق دارد، و همگی آن‌ها را بازیابی کنیم؟ (← ص. ۹۰)

(۴) چهارضلعی $ABCD$ داده شده است به‌طوری‌که

$$\angle DAC = \angle CAB = 60^\circ,$$

و

$$AB = BD - AC.$$

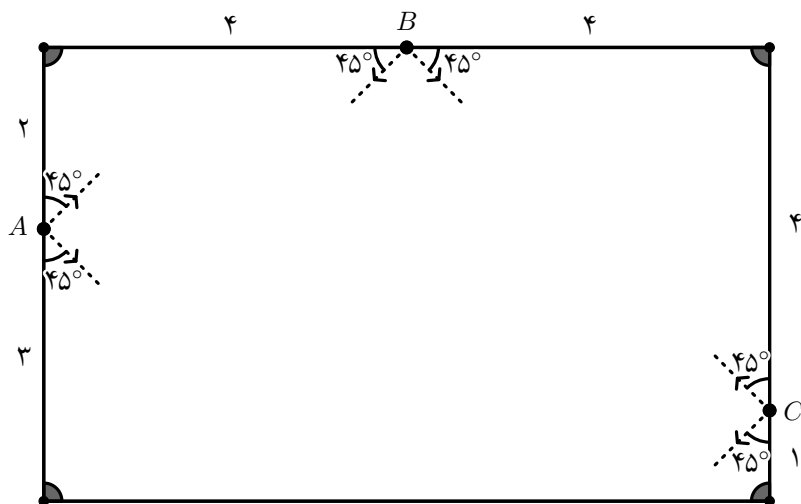
خطوط AB و CD در نقطه E متقاطع‌اند. ثابت کنید $\angle ADB = 2\angle BEC$.

(← ص. ۱۰۰)

(۵) برای یک چندضلعی محدب (چندضلعی‌ای که همه زوایای آن کوچک‌تر از 180° هستند) یک قطر را منصف گوئیم اگر هم مساحت و هم محیط چندضلعی را نصف کند. حداکثر چند قطر منصف در یک پنج‌ضلعی محدب داریم؟ (← ص. ۱۱۰)

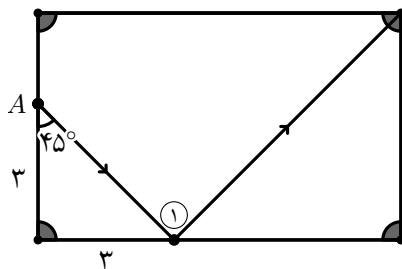
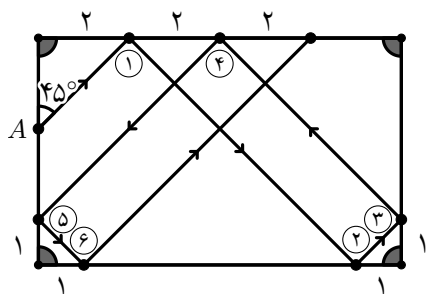
راه حل‌ها

(۱) میزی به شکل یک مستطیل ۵×۸ داریم. در چهار گوشه این میز سوراخ‌هایی قرار دارد. پس از شلیک توپی در جهت نشان داده شده از هر یک از نقاط A و B و C آیا توپ بعد از ۶ بار برخورد به دیواره‌های میز به درون یکی از سوراخ‌ها خواهد افتاد؟ (توپ پس از برخورد با دیواره‌های میز با همان زاویه باز می‌گردد).



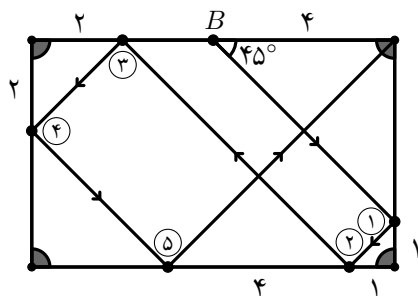
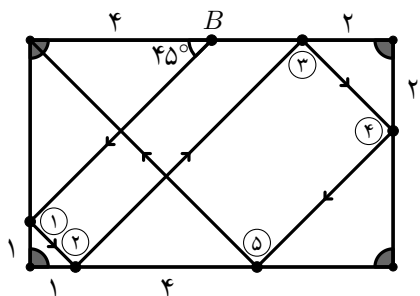
طرح شده توسط هیراد عالی پناه

نقطه A :



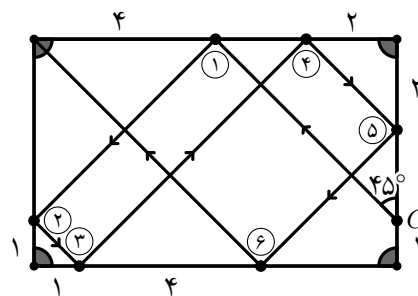
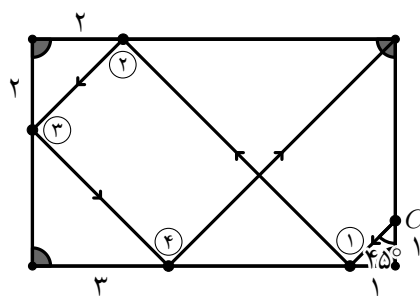
(الف) توپ پس از یک بازتاب به درون سوراخ می‌افتد. (ب) توپ پس از شش بازتاب به درون سوراخ نمی‌افتد.

نقطه B:



(الف) توپ پس از پنج بازتاب به درون سوراخ می‌افتد. (ب) توپ پس از پنج بازتاب به درون سوراخ می‌افتد.

نقطه C:



(الف) توپ پس از شش بازتاب به درون سوراخ می‌افتد. (ب) توپ پس از چهار بازتاب به درون سوراخ می‌افتد.

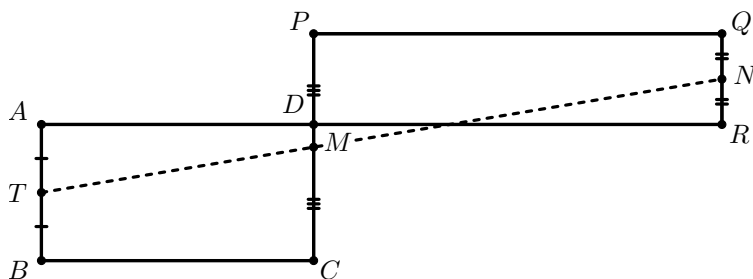
به دو شکل می‌توان به مسئله نگاه کرد:

۱. مسیرهایی که توپ بعد از حداکثر ۶ بازتاب به سوراخ می‌افتد:
در این حالت همهٔ موارد به غیر از A (ب) مطلوب‌اند.

۲. مسیرهایی که توپ بعد از دقیقاً ۶ بازتاب به سوراخ می‌افتد:
در این حالت تنها مورد C (الف) مطلوب است.

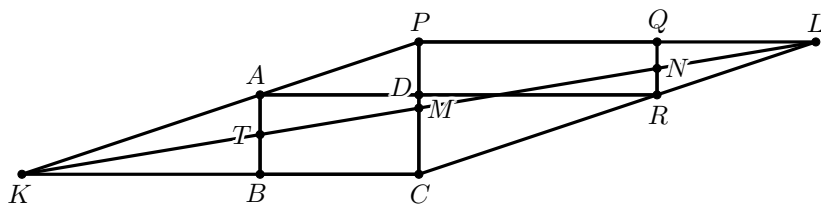


۲) مطابق شکل، $ABCD$ و $PQRD$ دو مستطیل با مساحت برابر هستند که اضلاع متناظر موازی دارند. نقاط M ، N و T به ترتیب اوساط پاره‌خط‌های PC ، QR و AB هستند. ثابت کنید نقاط M ، N و T روی یک خط قرار دارند.



طرح شده توسط مرتضی ثقفیان

راه حل. محل برخورد PQ و CR را L و محل برخورد BC و AP را K بنامید.



طبق قضیه تالس، L ، N و M روی یک خط قرار دارند و همچنین نقاط K ، T و M نیز روی یک خط قرار دارند. پس اگر نشان دهیم چهارضلعی $PLCK$ متوازی‌الاضلاع است آن‌گاه نتیجه می‌شود K ، M و L روی یک خط قرار دارند و حکم نتیجه می‌شود. از آن‌جا که $PL \parallel CK$ کافی است نشان دهیم $PK \parallel CL$ یا $PA \parallel CR$. از آن‌جا که مساحت دو مستطیل برابر است می‌توان نوشت

$$PD \cdot DR = AD \cdot CD \implies \frac{PD}{CD} = \frac{AD}{DR}$$



پس طبق عکس قضیه تالس $AP \parallel CR$ و حکم ثابت شد.

(۳) در صفحه $۲ < n$ خط در حالت عمومی رسم شده‌اند؛ یعنی هر دو خط با یکدیگر برخورد می‌کنند ولی هیچ سه خطی هم‌رس نیستند. تمامی نقاط برخورد خطوط با یکدیگر علامت گذاشته می‌شود. سپس همگی خطوط پاک می‌شوند ولی نقاط علامت‌گذاری‌شده باقی می‌مانند. نمی‌دانیم کدام نقطه متعلق به کدام خط است. آیا ممکن است بدانیم هر خط به کجا تعلق دارد، و همگی آن‌ها را بازیابی کنیم؟

طرح شده توسط Boris Frenkin – روسیه

پاسخ. بله، ممکن است.

راه حل. همه خطوطی که از حداقل $n - ۱$ نقطه علامت‌گذاری‌شده می‌گذرند را رسم می‌کنیم. همه خطوط پاک شده بین این خطوط هستند. فرض کنید خط l شامل $n - ۱$ نقطه علامت‌گذاری‌شده باشد. این نقاط محل تقاطع جفت خطوط $(l_1, l_2), (l_3, l_4), \dots, (l_{2n-3}, l_{2n-2})$ از خطوط پاک شده هستند. از آن‌جا که $n > ۲$ می‌توان نوشت $n > 2n - ۲$ پس اعداد $۱ \leq i < j \leq 2n - ۲$ وجود دارند به‌طوری‌که l_i بر l_j منطبق باشد. پس دو نقطه از نقاط روی l روی l_i نیز قرار دارند در نتیجه دو خط l و l_i بر هم منطبق‌اند و l یکی از خطوط پاک‌شده است. به‌طور مشابه بقیه خطوط رسم‌شده نیز همان خطوط پاک شده هستند پس همه آن‌ها بازیابی‌شده‌اند و حکم نتیجه می‌شود. ■

(۴) چهارضلعی $ABCD$ داده شده است به طوری که

$$\angle DAC = \angle CAB = 60^\circ,$$

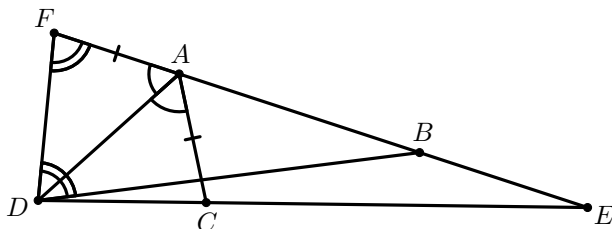
و

$$AB = BD - AC.$$

خطوط AB و CD در نقطه E متقاطع اند. ثابت کنید $\angle ADB = 2\angle BEC$.

طرح شده توسط ایمان مقصودی

راه حل. نقطه F را روی امتداد BA از طرف A در نظر می گیریم به طوری که $AF = AC$.



از تساوی $AB = BD - AC$ نیز نتیجه می شود $BF = BD$. می توان نوشت

$$\left. \begin{array}{l} AF = AC \\ AD = AD \\ \angle FAD = \angle CAD = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle FAD \cong \triangle CAD. \quad (1)$$

حالا دقت کنید که

$$\angle BEC = \angle FAD - \angle ADC \stackrel{(1)}{=} 60^\circ - \angle ADF \quad (2)$$

و از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \angle ADB &= \angle FDB - \angle ADF = \angle AFD - \angle ADF \\ &= (120^\circ - \angle ADF) - \angle ADF \\ &= 120^\circ - 2\angle ADF \\ &\stackrel{(2)}{=} 2\angle BEC \end{aligned}$$

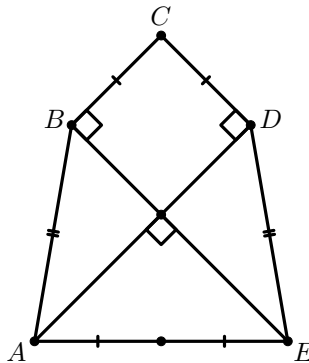
پس حکم مسئله ثابت شد. ■

(۵) برای یک چندضلعی محدب (چندضلعی‌ای که همه زوایای آن کوچک‌تر از 180° هستند) یک قطر را منصف گوئیم اگر هم مساحت و هم محیط چندضلعی را نصف کند. حداکثر چند قطر منصف در یک پنج‌ضلعی محدب داریم؟

طرح شده توسط مرتضی ثقفیان

پاسخ. حداکثر تعداد قطرهای منصف برابر با ۲ است.

راه حل. دقت کنید که برای هر راس حداکثر یک قطر منصف وجود دارد که از آن راس بگذرد پس حداکثر تعداد قطرهای منصف در یک پنج‌ضلعی محدب می‌تواند برابر با ۲ باشد. شکلی که در ادامه می‌آید مثالی از یک پنج‌ضلعی محدب با دو قطر منصف را نشان می‌دهد.



سطح متوسط

مسائل

(۱) دو دایره ω_1 و ω_2 به مراکز O_1 و O_2 در A و B متقاطع اند و نقطه O_1 روی دایره ω_2 قرار دارد. نقطه P به دلخواه روی ω_1 انتخاب شده است. خطوط AP ، BP و O_1O_2 دایره ω_2 را برای بار دوم در نقاط X ، Y و C قطع می کنند. ثابت کنید چهارضلعی $XPYC$ متوازی الاضلاع است. (← ص. ۱۷)

(۲) همه چهارضلعی های $ABCD$ را بیابید به طوری که هر چهار مثلث BCD ، CDA ، DAB و ABC با هم متشابه باشند.

(← ص. ۱۹)

(۳) سه دایره ω_1 ، ω_2 و ω_3 از یک نقطه مشترک به نام P می گذرند. از P بر ω_1 مماسی رسم می کنیم تا با ω_2 و ω_3 برای بار دوم به ترتیب در نقاط $P_{1,2}$ و $P_{1,3}$ برخورد کند. به شکل مشابه نقاط $P_{2,1}$ ، $P_{2,3}$ ، $P_{3,1}$ و $P_{3,2}$ ایجاد می شوند. نشان دهید عمود منصف های پاره خط های $P_{1,2}P_{1,3}$ ، $P_{2,1}P_{2,3}$ و $P_{3,1}P_{3,2}$ هم رس می باشند.

(← ص. ۲۰)

(۴) در متوازی الاضلاع $ABCD$ نقطه K روی خط AD قرار دارد به طوری که $BK = AB$. فرض کنید P نقطه ای دلخواه روی AB باشد. عمود منصف پاره خط PC دایره محیطی مثلث APD را در دو نقطه X و Y قطع می کند. ثابت کنید دایره محیطی مثلث ABK از مرکز ارتفاعی مثلث AXY می گذرد.

(← ص. ۲۳)

(۵) مثلث ABC با $\angle A = 60^\circ$ داده شده است. نقاط E و F پای نیم ساز رئوس B و C هستند. نقاط P و Q به گونه ای در نظر گرفته شده اند که دو چهارضلعی $BFPE$ و $CEQF$ متوازی الاضلاع باشند. ثابت کنید $\angle PAQ > 150^\circ$ (زاویه PAQ که ضلع AB داخل آن نیست را در نظر بگیرید).

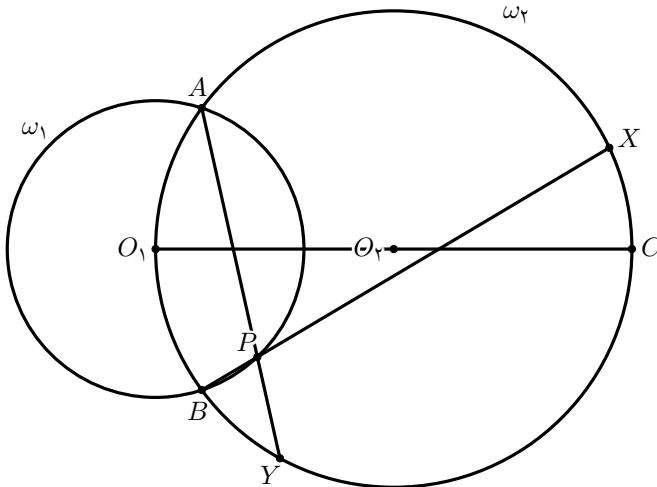
(← ص. ۲۵)

راه حل ها

(۱) دو دایره ω_1 و ω_2 به مراکز O_1 و O_2 در A و B متقاطع اند و نقطه O_1 روی دایره ω_2 قرار دارد. نقطه P به دلخواه روی ω_1 انتخاب شده است. خطوط AP ، BP و O_1O_2 دایره ω_2 را برای بار دوم در نقاط X ، Y و C قطع می کنند. ثابت کنید چهارضلعی $XPYC$ متوازی الاضلاع است.

طرح شده توسط ایمان مقصودی

راه حل.



می توان نوشت

$$\angle APB = \frac{\widehat{AO_1B}}{2} + \frac{\widehat{XCY}}{2}. \quad (1)$$

دقت کنید که $\angle AO_2O_1 = \angle BO_2O_1$ پس $\angle AO_1O_2 = \angle BO_1O_2$. حالا از آن جا که O_1 مرکز دایره محیطی APB است می توان نوشت

$$\angle APB = 180^\circ - \frac{\angle AO_1B}{2} = 180^\circ - \frac{\widehat{AXC}}{2} = \frac{\widehat{ABC}}{2}. \quad (2)$$

در نهایت از دو تساوی (۱) و (۲) به دست می آید

$$\frac{\widehat{AO_1B}}{2} + \frac{\widehat{XCY}}{2} = \frac{\widehat{ABC}}{2} \Rightarrow \widehat{XCY} = \widehat{BYC},$$

پس $CY \parallel BX$ و به طور مشابه $AY \parallel XC$ در نتیجه چهارضلعی $XPYC$ متوازی الاضلاع است و حکم نتیجه می شود. ■

۲) همهٔ چهارضلعی‌های $ABCD$ را بیابید به طوری که هر چهار مثلث BCD ، CDA ، DAB و ABC با هم متشابه باشند.

طرح شده توسط مرتضی ثقفیان

پاسخ. همهٔ مستطیل‌ها

راه حل. ابتدا فرض کنید $ABCD$ یک چهارضلعی مقعر باشد. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $\angle D > 180^\circ$ پس رأس D داخل مثلث ABC قرار دارد. از اینجا فقط از این نکته استفاده می‌شود که نقطهٔ D درون مثلث ABC قرار دارد. لذا مجدداً بدون کاسته شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $\angle ABC$ بزرگ‌ترین زاویه در مثلث ABC است. می‌توان نوشت

$$\angle ADC = \angle ABC + \angle BAD + \angle BCD > \angle ABC.$$

پس $\angle ADC$ از همهٔ زاویه‌های مثلث ABC بیش‌تر است و دو مثلث ADC و ABC نمی‌توانند متشابه باشند. در نتیجه در این حالت جوابی وجود ندارد.

حالا فرض کنید $ABCD$ یک چهارضلعی محدب با خاصیت مسئله باشد. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد بزرگ‌ترین زاویهٔ چهارضلعی $\angle B$ باشد. می‌توان نوشت

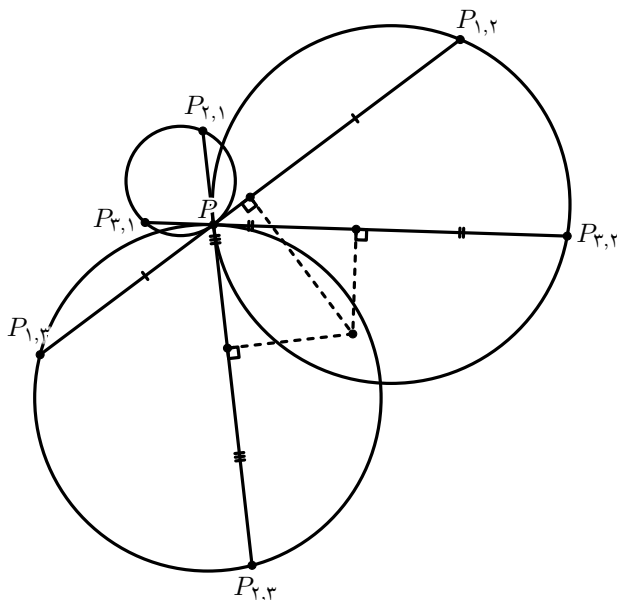
$$\angle ABC > \angle DBC, \quad \angle ABC \geq \angle ADC > \angle BDC$$

پس از آن‌جا که دو مثلث ABC و BCD متشابه‌اند باید داشته باشیم $\angle ABC = \angle BCD$ و به همین ترتیب هر چهار زاویهٔ چهارضلعی برابر می‌شوند. در نتیجه $ABCD$ یک مستطیل است و به راحتی می‌توان بررسی کرد که هر مستطیل شرط مسئله را داراست. ■

(۳) سه دایره ω_1 ، ω_2 و ω_3 از یک نقطه مشترک به نام P می‌گذرند. از P بر ω_1 مماسی رسم می‌کنیم تا با ω_2 و ω_3 برای بار دوم به ترتیب در نقاط $P_{1,2}$ و $P_{1,3}$ برخورد کند. به شکل مشابه نقاط $P_{2,1}$ ، $P_{2,3}$ ، $P_{3,1}$ ، $P_{3,2}$ ایجاد می‌شوند. نشان دهید عمود منصف‌های پاره‌خط‌های $P_{1,2}P_{1,3}$ ، $P_{2,1}P_{2,3}$ و $P_{3,1}P_{3,2}$ هم‌رس می‌باشند.

طرح شده توسط مهدی اعتصامی فرد

راه حل.



ابتدا فرض کنید هیچ دو خطی از بین خطوط $\ell_1 \equiv P_{2,1}P_{3,1}$ ، $\ell_2 \equiv P_{1,2}P_{3,2}$ ، $\ell_3 \equiv P_{1,3}P_{2,3}$ با هم موازی نباشند. مثلث XYZ از برخورد این خطوط تشکیل شده است به‌طوری‌که

$$X \equiv \ell_2 \cap \ell_3,$$

$$Y \equiv \ell_1 \cap \ell_3,$$

$$Z \equiv \ell_2 \cap \ell_1.$$

دقت کنید که

$$\angle P_{3,2}P_{1,2}P = \angle P_{3,2}PP_{2,3} = \angle PP_{1,3}P_{2,3}$$

در نتیجه $XP_{1,2} = XP_{1,3}$ و $YP_{2,1} = YP_{2,3}$ به‌طور مشابه به‌دست می‌آید $ZP_{3,1} = ZP_{3,2}$. پس نیم‌سازهای زوایای XYZ ، YXZ و YZX همان عمود منصف‌های پاره‌خط‌های

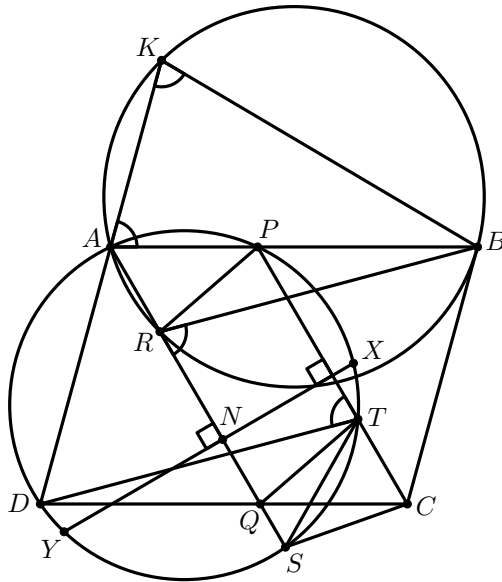
این نتیجه اثبات مسئله را کامل می‌کند.



(۴) در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ نقطه K روی خط AD قرار دارد به‌طوری‌که $BK = AB$. فرض کنید P نقطه‌ای دلخواه روی AB باشد. عمود منصف پاره خط PC دایره محیطی مثلث APD را در دو نقطه X و Y قطع می‌کند. ثابت کنید دایره محیطی مثلث ABK از مرکز ارتفاعی مثلث AXY می‌گذرد.

طرح شده توسط ایمان مقصودی

راه حل. فرض کنید AN ارتفاع مثلث AXY باشد و دایره محیطی مثلث ABK خط AN را برای بار دوم در R قطع کند. کافی است نشان دهیم R مرکز ارتفاعی مثلث AXY است.



فرض کنید PC و AN دایره محیطی مثلث APD را برای بار دوم در T و S قطع کنند و AN خط CD را در Q قطع کند. می‌توان نوشت

$$\angle BRS = \angle AKB = \angle KAB = \angle PTD \implies \angle BRS = \angle PTD \quad (۱)$$

دقت کنید که XY عمود منصف پاره خط PC است پس $AN \parallel PC$. همچنین $AP \parallel CQ$ بنابراین $APCQ$ متوازی‌الاضلاع است. حالا می‌توان نوشت

$$\left. \begin{array}{l} \angle BAR = \angle TCD \\ (۱) \implies \angle ARB = \angle CTD \\ AB = CD \end{array} \right\} \implies \triangle ARB \cong \triangle CTD \implies CT = AR.$$

پس $PTQR$ نیز متوازی الاضلاع است. چهارضلعی $APTS$ یک دوزنقه متساوی الساقین است بنابراین

$$CQ = AP = TS.$$

در نتیجه $TQSC$ نیز یک دوزنقه متساوی الساقین است. نهایتاً

$$CS = TQ = PR \implies \text{یک دوزنقه متساوی الساقین است.}$$

پس S و R قرینه یکدیگر نسبت به XY هستند و R مرکز ارتفاعی مثلث AXY است. ■

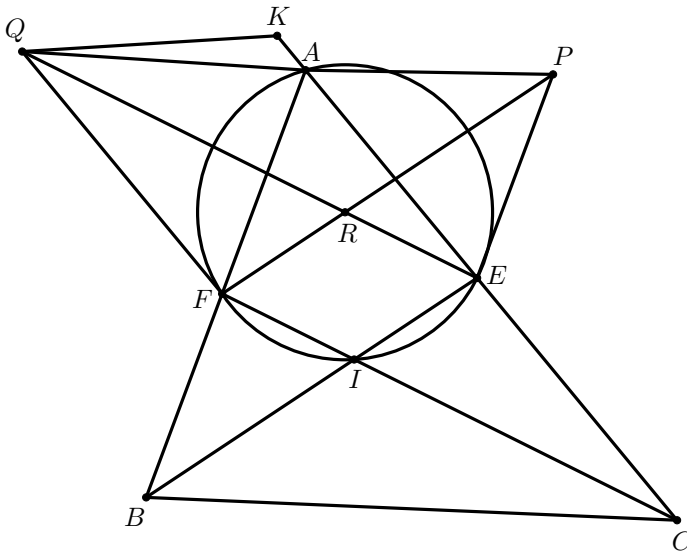
(۵) مثلث ABC با $\angle A = 60^\circ$ داده شده است. نقاط E و F پای نیم‌ساز رئوس B و C هستند. نقاط P و Q به‌گونه‌ای در نظر گرفته شده‌اند که دو چهارضلعی $BFPE$ و $CEQF$ متوازی‌الاضلاع باشند. ثابت کنید $\angle PAQ > 15^\circ$ (زاویه PAQ که ضلع AB داخل آن نیست را در نظر بگیرید).

طرح شده توسط علیرضا دادگرنیا

راه حل. فرض کنید خطوط BE و CF در I و خطوط QE و PF در R تقاطع داشته باشند. به‌سادگی می‌توان دید $\angle BIC = 120^\circ$. پس چهارضلعی $AEIF$ محاطی است و می‌توان نوشت

$$CE \cdot CA = CI \cdot CF \quad (۱)$$

هم‌چنین $\angle PRQ = \angle BIC = 120^\circ$ پس اگر یکی از دو زاویه $\angle APR$ و $\angle AQR$ بزرگ‌تر یا مساوی 30° باشند حکم نتیجه می‌شود.



فرض کنید هر دو زاویه کوچک‌تر از 30° باشند. در نتیجه نقطه K روی امتداد CA از طرف A وجود دارد که $\angle KQE = 30^\circ$. از آن‌جا که $\angle IAC = 30^\circ$ و $\angle ACI = \angle KEQ$ نتیجه می‌شود $\triangle AIC \sim \triangle QKE$. پس می‌توان نوشت

$$\frac{CI}{CA} = \frac{KE}{QE} > \frac{AE}{CF} \implies AE < \frac{CF \cdot CI}{CA} \stackrel{(۱)}{=} CE.$$

به طور مشابه نتیجه می شود $AF < BF$. از طرف دیگر حداقل یکی از دو زاویه $\angle ABC$ و $\angle ACB$ از 60° کوچک تر نیستند. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله می توان فرض کرد $\angle ABC \geq 60^\circ$ پس $AC \geq BC$ و طبق قضیه نیم ساز به دست می آید $AF \geq BF$ که تناقض است. ■

سطح پیشرفته

مسائل

(۱) دو دایره ω_1 و ω_2 در نقاط A و B متقاطع‌اند. نقطه C روی مماسی که از نقطه A بر دایره ω_1 رسم می‌شود در نظر گرفته شده است به طوری که $\angle ABC = 90^\circ$. خط دلخواه ℓ از نقطه C می‌گذرد و دایره ω_2 را در نقاط P و Q قطع می‌کند. خطوط AP و AQ دایره ω_1 را برای بار دوم به ترتیب در X و Z قطع می‌کنند. اگر پای عمود وارد از A بر ℓ نقطه Y باشد، ثابت کنید نقاط X ، Y و Z هم‌خط‌اند.

(← ص. ۳۱)

(۲) آیا در هر n ضلعی محدب ($n > 3$) یک رأس و یک قطر گذرنده از این رأس پیدا می‌شود طوری که زاویه‌ای که این قطر با دو ضلع مجاور با رأس می‌سازد، حاده باشند؟

(← ص. ۳۳)

(۳) دو دایره ω_1 و ω_2 به مراکز O_1 و O_2 در نقاط X و Y متقاطع‌اند. خط AB مماس مشترک ω_1 و ω_2 است به طوری که نقطه A روی ω_1 و نقطه B روی ω_2 قرار دارد. از X بر دایره ω_1 و ω_2 خط مماس رسم شده است تا O_1O_2 را به ترتیب در K و L قطع کنند. خط AK برای دومین بار دایره ω_1 را در N و خط BL برای دومین بار دایره ω_2 را در M قطع می‌کند. ثابت کنید خطوط AM ، BN و O_1O_2 هم‌رسم‌اند.

(← ص. ۳۴)

(۴) مثلث حاده‌زاویه و مختلف‌الاضلاع ABC با دایره محیطی Γ داده شده است. نقطه M وسط ضلع BC و نقطه N وسط \widehat{BC} از دایره Γ (کمانی که شامل A نیست) است. X و Y نقاطی روی دایره Γ هستند به طوری که $AM \parallel CY \parallel BX$. فرض کنید نقطه Z روی پاره‌خط BC وجود دارد به طوری که دایره محیطی مثلث XYZ بر BC مماس است. دایره محیطی مثلث ZMN را ω بنامید. خط AM دایره ω را برای بار دوم در P قطع می‌کند و نقطه K روی دایره ω قرار دارد به طوری که $KN \parallel AM$. فرض کنید ω_b دایره‌ای باشد که از نقاط B و X می‌گذرد و بر BC مماس است و ω_c دایره‌ای باشد که از نقاط C و Y می‌گذرد و بر BC مماس است. ثابت کنید دایره به مرکز K و شعاع KP بر سه دایره ω_b ، ω_c و Γ مماس است.

(← ص. ۳۵)

۵) رئوس مثلث ABC روی سهمی Δ قرار دارند به طوری که مرکز ارتفاعی مثلث بر کانون سهمی منطبق است. ثابت کنید با حرکت رئوس مثلث ABC روی سهمی Δ به طوری که مرکز ارتفاعی آن ثابت بماند، شعاع دایره محاطی مثلث نیز ثابت می ماند.

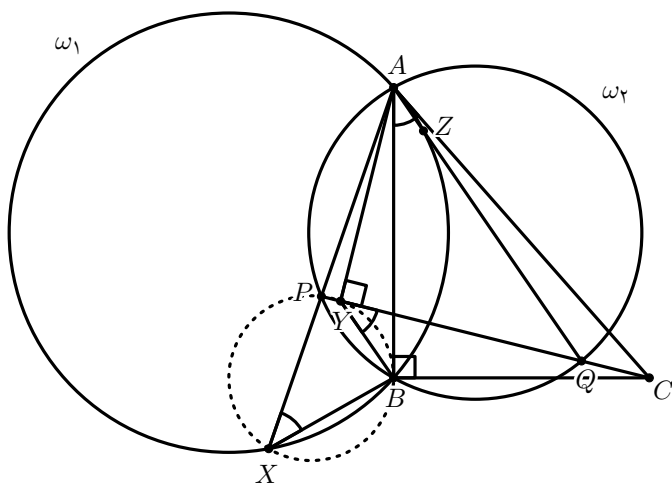
(← ص. ۳۸)

راه حل ها

(۱) دو دایره ω_1 و ω_2 در نقاط A و B متقاطع اند. نقطه C روی مماسی که از نقطه A بر دایره ω_1 رسم می شود در نظر گرفته شده است به طوری که $\angle ABC = 90^\circ$. خط دلخواه ℓ از نقطه C می گذرد و دایره ω_2 را در نقاط P و Q قطع می کند. خطوط AP و AQ دایره ω_1 را برای بار دوم به ترتیب در Z و X قطع می کنند. اگر پای عمود وارد از A بر ℓ نقطه Y باشد، ثابت کنید نقاط X ، Y و Z هم خط اند.

طرح شده توسط ایمان مقصودی

راه حل.



از آن جا که $\angle AYC = \angle ABC = 90^\circ$ نتیجه می شود چهارضلعی $AYBC$ محاطی است.

در نتیجه می توان نوشت

$$\angle BYC = \angle BAC = \angle BXA = \angle BXP$$

پس چهارضلعی $PYBX$ محاطی است و به طور مشابه چهارضلعی $QBYZ$ نیز محاطی است.
در نهایت می توان نوشت

$$\angle BYX = \angle BPX = \angle AQB = \angle ZQB = 180^\circ - \angle ZYB$$



که هم خطی نقاط X ، Y و Z را نتیجه می دهد.

(۲) آیا در هر n ضلعی محدب ($n > 3$) یک رأس و یک قطر گذرنده از این رأس پیدا می‌شود طوری‌که زاویه‌ای که این قطر با دو ضلع مجاور با رأس می‌سازد، حاده باشند؟

طرح شده توسط Boris Frenkin - روسیه

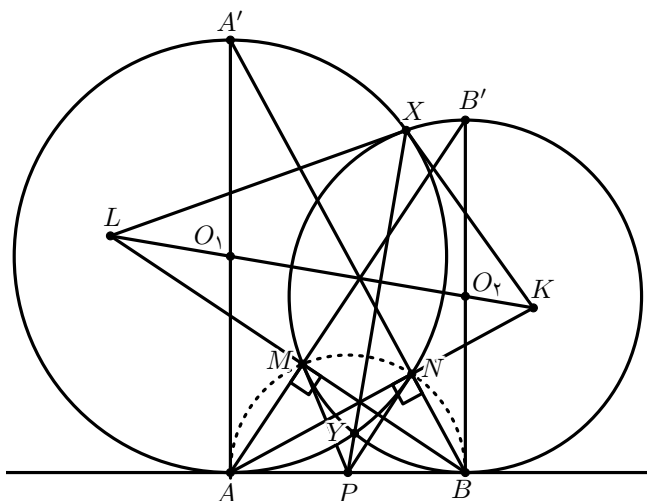
پاسخ. بله.

راه حل. فرض کنید پاسخ خیر باشد. یک n ضلعی محدب ($n > 3$) را در نظر بگیرید و فرض کنید AD بلندترین قطر آن باشد (اگر بلندترین قطر یکتا نبود یکی از آن‌ها را در نظر بگیرید). فرض کنید B و C رئوس مجاور A باشند. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $\angle BAD \geq 90^\circ$. این یعنی $BD > AD$ پس BD قطر نیست و ضلعی از n ضلعی است. همچنین $\angle ADB < 90^\circ$. فرض کنید C' راسی مجاور با D و به غیر از B باشد. در نتیجه $\angle ADC' \geq 90^\circ$. مشابه قبل $AC' > AD$ پس AC' باید ضلعی از n ضلعی باشد و $C' \equiv C$ که نتیجه می‌دهد $n = 4$. زوایای BAC و BDC منفرجه‌اند پس اندازه طول BC از AC و BD بیش‌تر است در نتیجه $BC > AD$ که تناقض است. ■

(۳) دو دایره ω_1 و ω_2 به مراکز O_1 و O_2 در نقاط X و Y متقاطع اند. خط AB مماس مشترک ω_1 و ω_2 است به طوری که نقطه A روی ω_1 و نقطه B روی ω_2 قرار دارد. از X بر دایره ω_1 و ω_2 خط مماس رسم شده است تا O_1O_2 را به ترتیب در K و L قطع کنند. خط AK برای دومین بار دایره ω_1 را در N و خط BL برای دومین بار دایره ω_2 را در M قطع می کند. ثابت کنید خطوط AM ، BN و O_1O_2 همسرا هستند.

طرح شده توسط Dominik Burek – لهستان

راه حل. فرض کنید P وسط AB باشد. از آنجا که قوت P نسبت به دو دایره برابر است، P روی محور اصلی دو دایره یعنی XY قرار دارد.

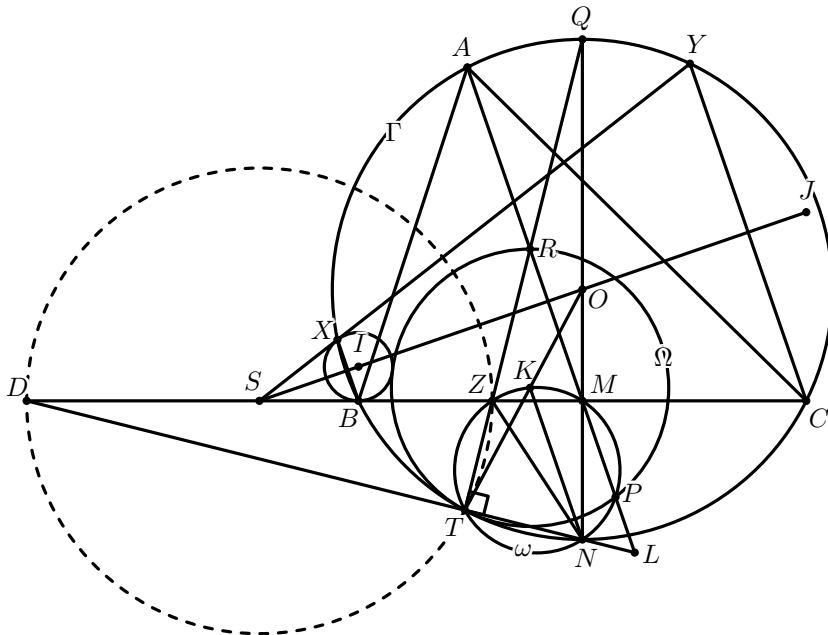


طبق تقارن KY بر ω_1 مماس است. پس XY قطبی K نسبت به ω_1 است. از آنجا که P روی XY قرار دارد، قطبی P نسبت به ω_1 از K می گذرد هم چنین به سادگی می توان دید که از A نیز می گذرد پس خط AK قطبی P نسبت به ω_1 است و PN بر این دایره مماس است. به طور مشابه PM نیز بر ω_2 مماس است پس چهار نقطه A, B, M و N روی دایره ای به مرکز P قرار دارند و $\angle AMB = \angle ANB = 90^\circ$. حالا اگر روبرو قطری A در ω_1 را A' و روبرو قطری B در ω_2 را B' بنامیم، خط BN از A' و خط AM از B' می گذرد. در نهایت دقت کنید که چهارضلعی $AA'B'B$ یک دوزنقه است و O_1 و O_2 اوساط قاعده های آن هستند پس $A'B$ ، $A'A$ و $B'A$ همسرا هستند و حکم مسئله نتیجه می شود. ■

(۴) مثلث حاده‌زاویه و مختلف‌الاضلاع ABC با دایره محیطی Γ داده شده است. نقطه M وسط ضلع BC و نقطه N وسط \widehat{BC} از دایره Γ (کمائی که شامل A نیست) است. X و Y نقاطی روی دایره Γ هستند به‌طوری‌که $BX \parallel CY \parallel AM$. فرض کنید نقطه Z روی پاره‌خط BC وجود دارد به‌طوری‌که دایره محیطی مثلث XYZ بر BC مماس است. دایره محیطی مثلث ZMN را ω بنامید. خط AM دایره ω را برای بار دوم در P قطع می‌کند و نقطه K روی دایره ω قرار دارد به‌طوری‌که $KN \parallel AM$. فرض کنید ω_b دایره‌ای باشد که از نقاط B و X می‌گذرد و بر BC مماس است و ω_c دایره‌ای باشد که از نقاط C و Y می‌گذرد و بر BC مماس است. ثابت کنید دایره به مرکز K و شعاع KP بر سه دایره ω_b ، ω_c و Γ مماس است.

طرح شده توسط Tran Quan – ویتنام

راه حل. فرض کنید I, J, O به ترتیب مراکز دایره ω_b ، ω_c و Γ باشند. به‌سادگی می‌توان دید که نقاط I, J, O همخط‌اند. فرض کنید S محل تقاطع BC و IJ باشد. از آن‌جا که X و Y قرینه C و B نسبت به IJ هستند، نتیجه می‌شود S, X و Y همخط‌اند. فرض کنید T نقطه‌ای روی کمان \widehat{BC} از دایره Γ (کمائی که شامل راس A نیست) باشد به‌طوری‌که ST بر دایره Γ مماس است. TZ دایره Γ را برای بار دوم در Q قطع می‌کند.



بنابر

$$ST^2 = SX \cdot SY = SZ^2,$$

نتیجه می شود ZT نیم سازه داخلی $\angle BTC$ است، در نتیجه Q وسط کمان \widehat{BAC} از دایره Γ است. پس $ZT \perp NT$ که نتیجه می دهد T روی دایره ω قرار دارد. فرض کنید R محل تقاطع AM و TQ و Ω دایره محیطی مثلث RTP باشد. از آن جا که

$$\angle RPT = \angle MPT = \angle SZT = \angle STR,$$

پس ST بر دایره Ω نیز مماس است و دو دایره Γ و Ω بر هم مماس اند. نشان می دهیم K مرکز دایره Ω است. حالا می توان نوشت

$$\begin{cases} SOMT \text{ است محاطی} \implies \angle OSM = \angle OTM \\ OS \perp AM \text{ و } MS \perp OM \implies \angle OMA = \angle OSM = \angle OTM \\ \angle OTQ = \angle OQT \end{cases}$$

که نتیجه می دهد

$$\angle MTR = \angle OTQ + \angle OTM = \angle OQT + \angle OMA = \angle MRT,$$

پس $MR = MT$. فرض کنید L محل تقاطع AM و TN باشد. می توان به سادگی دید $\triangle RTL$ به راس T قائم الزاویه است پس M وسط RL است. می توان نوشت

$$\begin{aligned} KN \parallel ML &\implies \angle MTN = \angle MLT = \angle KNT \\ &\implies KM \parallel TN \\ &\implies KM \perp RT \end{aligned}$$

پس MK عمود منصف پاره خط RT است. دقت کنید که

$$\angle ZPR = \angle ZTM = \angle ZRP \implies ZR = ZP.$$

از آن جا که ZN قطر دایره ω است نتیجه می شود

$$ZK \perp KN \implies ZK \perp RP.$$

پس ZK نیز عمود منصف پاره خط RP است. در نتیجه K مرکز دایره Ω است. نهایتاً نشان می دهیم دایره Ω بر دوائر ω_b و ω_c مماس است. فرض کنید D محل تقاطع TN و BC و (S, SZ) دایره به مرکز S و شعاع SZ باشد. از آن جا که TZ نیم سازه داخلی $\angle BTC$

است به دست می‌آید TD نیم‌ساز خارجی همین زاویه است که نتیجه می‌دهد $\angle(DZ, BC) = -1$.
دقت کنید که M وسط BC است پس

$$MB^2 = MZ \cdot MD,$$

که نتیجه می‌دهد M روی محور اصلی دوائر ω_b و (S, SZ) است. همچنین می‌دانیم $MA \perp SI$ پس MA محور اصلی دوائر ω_b و (S, SZ) است. در نتیجه قوت R نسبت به این دو دایره برابر است. حالا انعکاس به مرکز R و شعاع

$$r = \sqrt{RZ \cdot RT},$$

دایره Ω را به $ZM \equiv BC$ و دایره ω_b را به خودش تبدیل می‌کند. پس از آن‌جا که دایره ω_b بر BC مماس است دایره ω_b بر دایره Ω نیز مماس است.
به‌طور مشابه دایره Ω بر دایره ω_c نیز مماس است و اثبات کامل می‌شود. ■

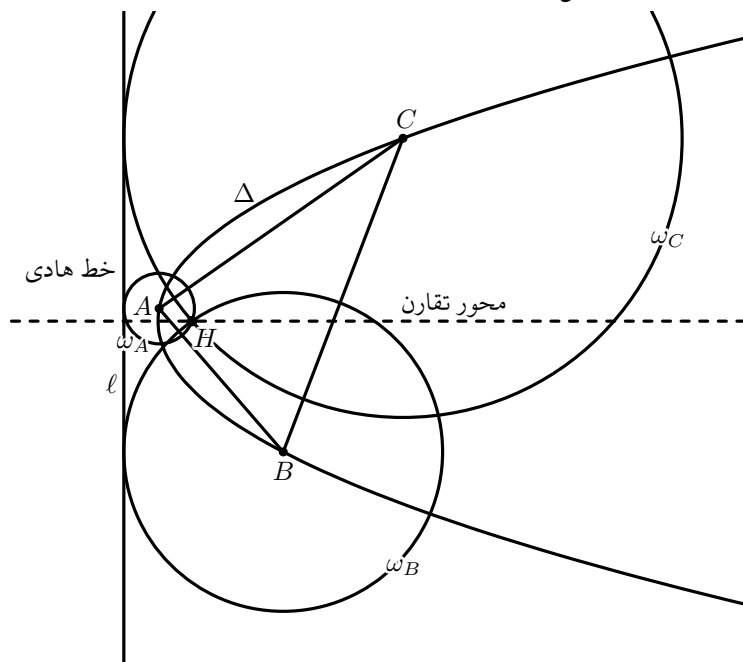
(۵) رئوس مثلث ABC روی سهمی Δ قرار دارند به طوری که مرکز ارتفاعی مثلث بر کانون سهمی منطبق است. ثابت کنید با حرکت رئوس مثلث ABC روی سهمی Δ به طوری که مرکز ارتفاعی آن ثابت بماند، شعاع دایره محاطی مثلث نیز ثابت می ماند.

طرح شده توسط مهدی اعتصامی فرد

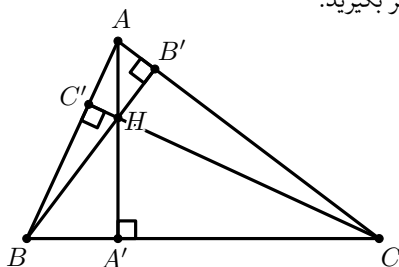
راه حل. از آن جا که H بر کانون سهمی Δ منطبق است دایره

$$\omega_A = (A, AH), \omega_B = (B, BH) \text{ و } \omega_C = (C, CH)$$

بر ℓ ، خط هادی Δ ، مماس اند.



حالا مثلث ABC را در نظر بگیرید.



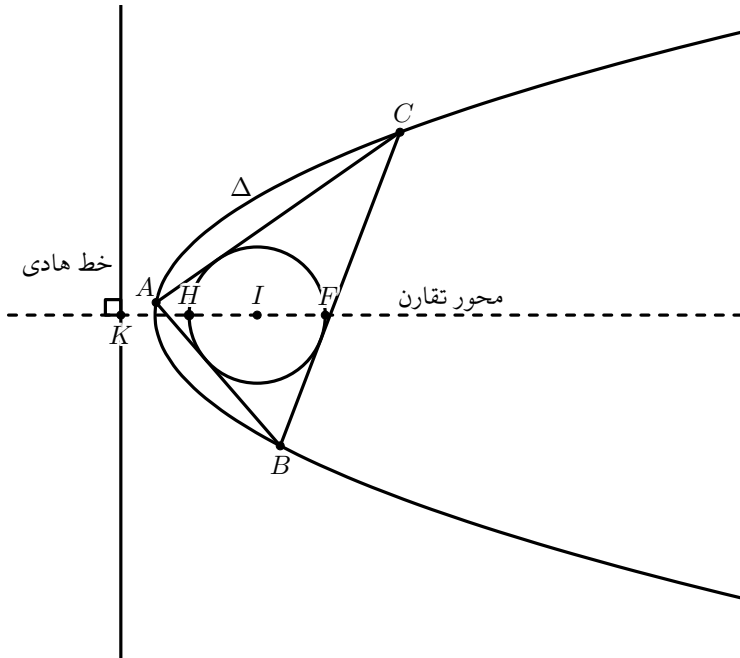
می‌دانیم

$$HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC' = t.$$

همچنین

$$\left. \begin{array}{l} HA = 2R \cos A \\ HA' = 2R \cos B \cos C \end{array} \right\} \Rightarrow t = 4R^2 \cos A \cos B \cos C. \quad (1)$$

انعکاس به مرکز H و با ضریب $-2t$ سه دایره ω_A ، ω_B و ω_C را به سه خط BC ، AC و AB تبدیل می‌کند. تحت این انعکاس خط ℓ به دایره محاطی مثلث ABC تبدیل می‌شود. پس $IH \perp \ell$ و I روی محور تقارن Δ قرار دارد. همچنین H روی دایره محاطی مثلث ABC قرار دارد پس $HI = r$.



می‌دانیم اگر مرکز ارتفاعی مثلث ABC روی دایره محاطی آن باشد می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} HI^2 &= 2r^2 - 4R^2 \cos A \cos B \cos C \\ \Rightarrow r^2 &= 2r^2 - 4R^2 \cos A \cos B \cos C \\ \Rightarrow r^2 &= 4R^2 \cos A \cos B \cos C \end{aligned}$$

بنابر (۱)، نتیجه می‌شود $r^2 = t = HA \cdot HA'$ تحت انعکاس نقطه K به نقطه F تبدیل می‌شود پس

$$\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{HF} = -2t = -2r^2 \implies HK = r.$$



که نتیجه می‌دهد شعاع دایره محاطی مثلث ABC ثابت است.